Geometria III
(con soluzioni degli es. 2,3,4)

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
6 luglio 2018

Si svolgano i seguenti quattro esercizi. **Ogni risposta deve essere adeguatamente motivata**. Si terrà conto non solo della correttezza dei risultati, ma anche della completezza e chiarezza delle spiegazioni.

Attenzione. *Il testo è composto da due pagine (la seconda pagina è sul retro di questo foglio).*

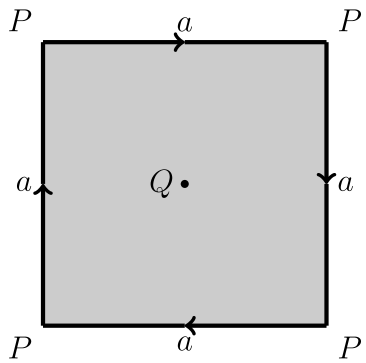
Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio tridimensionale ordinario dotato della topologia euclidea e siano $\mathbb{S}^2$, L, N e X i seguenti sottospazi topologici di $\mathbb{R}^3$:

- $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,
- $L := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y = z = 0\}$,
- $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y = 0\}$,
- $X := (\mathbb{S}^2 \cup L) \setminus M$.

(1a) Si calcolino i gruppi di omologia $H_q(X)$ e i gruppi di omologia relativa $H_q(X, \mathbb{S}^2 \setminus M)$ per ogni $q \in \mathbb{N}$.

(1b) Si dica se X è omeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio topologico X_4 ottenuto identificando i quattro lati di un quadrato come in figura. I vertici sono tutti identificati nel punto P. Sia Y_4 lo spazio topologico ottenuto da X_4 togliendo un punto Q interno al quadrato. Siano X_5 e Y_5 definiti in modo analogo a partire da un pentagono.



(2a) Si calcolino i gruppi fondamentali di X_4, X_5, Y_4 e Y_5.

(2b) Si stabilisca se tra tali spazi ci sono coppie di spazi omotopicamente equivalenti.

(2c) Si dica se X_4 o X_5 sono omotopicamente equivalenti a una superficie compatta.

SOLUZIONE: (2a) Per il calcolo di $\pi(X_4, P)$ si può applicare il teorema di Seifert-Van Kampen, scegliendo come aperti Y_4 e un (piccolo) disco centrato in Q. Y_4 si retrae con deformazione sul bordo del quadrato coi lati identificati, quindi è omotopicamente equivalente a S^1, mentre il disco è contraibile. Sia x_0 un punto nell'intersezione del disco con Y_4. Per il teorema $\pi(X_4, x_0)$ è generato da una classe $[\alpha]$ (con $\alpha = \overline{\gamma} * a * \gamma$ cammino ottenuto componendo a con un segmento γ congiungente P con x_0), con unica relazione $[\alpha]^4 = 1$. Dunque $\pi(X_4, x_0) \simeq \pi(X_4, P) \simeq \mathbb{Z}_4$, il gruppo ciclico con quattro elementi.

Analogamente, $\pi(X_5, P) \simeq \mathbb{Z}_5$. Inoltre, per quanto detto sopra $\pi(Y_4, P) \simeq \pi(Y_5, P) \simeq \pi(S^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$.

(2b) Spazi omotopicamente equivalenti hanno gruppi fondamentali isomorfi. Per il punto a), solo Y_4 e Y_5 sono omotopicamente equivalenti.

(2c) I gruppi fondamentali di X_4 e X_5 sono abeliani, ma non sono isomorfi agli abelianizzati dei gruppi fondamentali delle superfici compatte (solo quello di $U_2 = \mathbb{RP}^2$ è ciclico, ma di ordine 2), per cui i due spazi non sono omotopicamente equivalenti ad alcuna superficie compatta.

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{C}$ con $|a| < 1$ e sia γ la circonferenza $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ percorsa in senso antiorario. Si consideri l'integrale di linea

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z+a}{z-a} z^n \, dz.$$

(3a) Mostrare che I vale $2a^{n+1}$ per ogni intero $n \geq 0$.

(3b) Calcolare I per ogni intero $n < 0$.

SOLUZIONE: (3a) Essendo a interno a γ (e quindi $Ind_\gamma(a) = 1$), la formula integrale di Cauchy applicata alla funzione olomorfa $f(z) = (z+a)z^n$ fornisce il risultato: $I = f(a) = 2aa^n = 2a^{n+1}$ per ogni $n \geq 0$.

(3b) Sia $m = -n > 0$. La funzione $g(z) = (z+a)/(z^m(z-a))$, meromorfa su $\mathbb{C}$, ha un polo di ordine m in $z = 0$ se $a = 0$, mentre ha un polo semplice in a e un polo di ordine m in 0 se $a \neq 0$, e nessuna altra singolarità.

Se $a = 0$, $I = \mathrm{Res}_0(1/z^m) = 1$ se $m = 1$ e $I = 0$ se $m > 1$.

Se $a \neq 0$, $I = \mathrm{Res}_a(g) + \mathrm{Res}_0(g)$. Si ha $\mathrm{Res}_a(g) = (a+a)/a^m = 2/a^{m-1} = 2a^{n+1}$ poiché il polo è semplice. Inoltre se $m = 1$ si ha $\mathrm{Res}_0(g) = (0+a)/(0-a) = -1$. Se invece $m > 1$, si ottiene

$$\mathrm{Res}_0(g) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to 0} \left(\left(\frac{z+a}{z-a} \right)^{(m-1)} \right) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{2a(-1)^{m-1}(m-1)!}{(z-a)^m} = -\frac{2}{a^{m+1}} = -2a^{n+1}.$$

Dunque per $n = -1$ si ha $I = 2 - 1 = 1$, mentre per $n \leq -2$ vale $I = 2a^{n+1} - 2a^{n+1} = 0$.

Un modo alternativo per calcolare I nel caso $m > 1$, che non richiede il calcolo delle derivate, consiste nel trovare il residuo all'infinito. Infatti si ha $I = -\mathrm{Res}_\infty(g) = 0$ (la funzione $(-1/w^2)g(1/w) = -w^{m-2}(1+aw)/(1-aw)$ è olomorfa nell'intorno di 0 se $m > 1$).

Esercizio 4. Si consideri la funzione meromorfa

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{\tan z}.$$

(4a) Calcolare il residuo di f nel punto $z = 0$.

(4b) Stabilire se $z = 0$ è una singolarità eliminabile di f.

SOLUZIONE: (4a) e (4b) Si osservi che

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1 - \cos z}{\sin z} = \frac{z}{\sin z} \frac{1 - \cos z}{z}$$

per ogni $z \neq 0$, e $\lim \frac{z}{\sin z} = 1$ per $z \to 0$. Dunque $z = 0$ è una singolarità eliminabile di $\frac{z}{\sin z}$. La funzione $(1 - \cos z)/z$ ha serie di Laurent in 0

$$\frac{1}{z}\left(1 - \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right)\right) = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{4!} + \cdots$$

Dunque $\mathrm{Res}_0(f) = 0$ e $z = 0$ è una singolarità eliminabile.